

Correction du DST n°2

22/11/2025

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \frac{x^{2k}}{3^k} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{x^2}{3}\right)^k \\ &= \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{x^2}{3}\right)^2}{\frac{x^2}{3} - 1} \\ &= \boxed{\frac{x^{2n+2} - 3^{n-1}x^4}{3^n x^2 - 3^{n+1}}}\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k+1) &= 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= n(n+1) + n \\ &= \boxed{n(n+2)}\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2n} (k-n)^2 &= \sum_{i=0}^n i^2 \\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n 2^{-k} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2^{-1})^k 1^{n-k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= \boxed{\frac{3^n}{2^n}}\end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} (-2)^{k-n} \binom{2n}{k} &= (-2)^{-n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k 1^{2n-k} \\ &= (-2)^{-n} (1 + (-2))^{2n} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= (-2)^{-n} (-1)^{2n} \\ &= \boxed{(-2)^{-n}} \quad \text{car } (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i^2 + ij) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n i^2 + i \sum_{j=0}^n j \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \left((n+1)i^2 + i \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= (n+1) \sum_{i=0}^n i^2 + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^n i \\
 &= \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)^2[2(2n+1) + 3n]}{12} \\
 &= \frac{n(n+1)^2(7n+2)}{12}
 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^i \binom{n}{j} &= \left(\sum_{i=0}^n 2^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \right) \\
 &= \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) \times 2^n \\
 &= 2^{2n+1} - 2^n
 \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j \binom{n}{j} \binom{j}{k} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^j \\
 &= (1+2)^n
 \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton

$$= 3^n$$

Exercice 3

1. sh et ch sont bien définies sur \mathbb{R} comme somme et produit de fonctions définies sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$. On en déduit que $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est bien défini pour tout réel x , donc th est aussi définie sur \mathbb{R} .

2. Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= -\operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(-x) &= \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} \\ &= \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \\ &= -\operatorname{th}(x)\end{aligned}$$

donc sh et th sont impaires et ch est paire.

3. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ est strictement décroissante donc $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x}$ est strictement croissante.

On en conclut que sh est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x) > 0 &\iff e^x - e^{-x} > 0 \\ &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff e^{2x} > 1 && \text{car } e^x > 0 \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0\end{aligned}$$

et de même $\operatorname{sh}(x) < 0 \iff x < 0$ et $\operatorname{sh}(x) = 0 \iff x = 0$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$	$-$	0	$+$

On pouvait aussi remarquer que $\operatorname{sh}(0) = 0$ et conclure directement grâce à la croissance stricte de sh .

- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ par opérations.
4. (a) ch est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$$

(b) Les limites de ch en $+\infty$ et en $-\infty$ s'obtiennent par sommes de limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$$

et on a $\text{ch}(0) = 1$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$	$-$	0	$+$
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par inégalité triangulaire :

$$|e^x - e^{-x}| \leq |e^x| + |-e^{-x}| = e^x + e^{-x} = |e^x + e^{-x}|$$

d'où

$$\left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right| \leq 1$$

avec égalité si et seulement si e^x et $-e^{-x}$ sont de même signe, ce qui n'est jamais le cas car l'un est strictement positif et l'autre strictement négatif. On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right| < 1$$

c'est à dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1}$$

(b) th est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas (car $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \geq 1$ d'après le tableau de variation de ch).

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} \text{th}'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 \\ &= 1 - (\text{th}(x))^2 \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \text{th}(x) < 1$ d'après la question 5.(a) donc $0 \leq (\text{th}(x))^2 < 1$. On en déduit que $1 - (\text{th}(x))^2 > 0$ c'est à dire $\text{th}'(x) > 0$ et donc $\boxed{\text{th est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

(d) $\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$ par opérations.

De même, $\text{th}(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$ par opérations.

On en conclut que la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique admet deux asymptotes horizontales, l'une d'équation $y = 1$ et l'autre d'équation $y = -1$.

(e) On a déjà montré que th est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc elle est injective (si $x \neq y$, alors ou bien $x < y$ donc $\text{th}(x) < \text{th}(y)$, ou bien $x > y$ donc $\text{th}(x) > \text{th}(y)$). Dans tous les cas $\text{th}(x) \neq \text{th}(y)$.

Pour tout $y \in]-1; 1[$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \\
&\iff e^x - e^{-x} = y e^x + y e^{-x} \\
&\iff e^x(1 - y) = e^{-x}(1 + y) \\
&\iff e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} && \text{car } 1 - y \neq 0 \\
&\iff x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) && \text{car } \frac{1 + y}{1 - y} > 0
\end{aligned}$$

donc $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right)$ est un antécédent de y , ainsi $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1; 1[$ est surjective donc c'est bien une bijection de \mathbb{R} vers $] - 1; 1[$, et sa bijection réciproque est :

$ \begin{aligned} \operatorname{th}^{-1} :] - 1; 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} \end{aligned} $
--

Exercice 4

- Posons $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x + 1) + \ln(x)$ et $g(x) = \ln(x + 1) - \ln(x) - \frac{1}{x + 1}$. f et g sont dérivables sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. De plus :

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, \quad f'(x) &= \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x} && \forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x + 1)^2} \\
&\frac{1}{x(x + 1)} - \frac{1}{x^2} && = \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x(x + 1)}
\end{aligned}$$

Or pour tout $x > 0$ on a $x < x + 1$ donc $x^2 < x(x + 1) < (x + 1)^2$ d'où :

$$\frac{1}{(x + 1)^2} < \frac{1}{x(x + 1)} < \frac{1}{x^2}$$

ce qui permet d'observer que $f'(x) < 0$ et $g'(x) < 0$ donc f et g sont toutes deux décroissantes sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln \left(\frac{x + 1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ donc par opérations sur les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

De même, $g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x + 1}$ donc par opérations sur les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

On en conclut finalement que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$, d'où les inégalités voulues.

- D'après la question précédente, on peut écrire pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k + 1} \leq \ln(k + 1) - \ln(k) \quad (1) \quad \text{et} \quad \ln(k + 1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \quad (2)$$

En sommant terme à terme l'inégalité (2) pour k allant de 1 à n on a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} && \text{par changement d'indice} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) && \text{d'après l'inégalité (1)}
\end{aligned}$$

donc on a bien, pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k))}$$

enfin, en simplifiant les sommes télescopiques : $\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$ et $\sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$ d'où :

$$\boxed{\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)}$$

3. D'après l'encadrement précédent, on peut écrire pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1 + \ln(n)}{\ln(n)}$$

On a $\frac{1 + \ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(n)}{\ln(n)} = 1$ par opérations sur les limites, et

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &= \frac{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \\
&= 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}
\end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ par opérations sur les limites.

$$\boxed{\text{On en conclut par encadrement que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1.}$$

Exercice 5

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^{2a \ln(x)} = 0$ par composition de limites, donc $\lim_{x \rightarrow 0} ax^{2a} = 0$. Par somme on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$.

Pour tout $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^{2a} \left(\frac{\ln x}{ax^{2a}} - 1 \right) \\ &= e^{2a \ln(x)} \left(\frac{\ln x}{a e^{2a \ln x}} - 1 \right)\end{aligned}$$

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^{2aX}} = 0$ par croissance comparée donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{a e^{2a \ln x}} = 0$ par composition, d'où par opérations :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty.}$$

2. φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} \\ &= \frac{1 - 2a^2 x^{2a}}{x}\end{aligned}$$

donc $\varphi'(x)$ est du même signe que $1 - 2a^2 x^{2a}$.

$$\varphi'(x) > 0 \iff 1 - 2a^2 x^{2a} > 0$$

$$\iff x^{2a} < \frac{1}{2a^2}$$

$$\iff x < \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/2a} \quad \text{par croissance de } x \mapsto x^{1/2a}$$

et de même, $\varphi'(x) < 0 \iff x > \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/2a}$ et $\varphi'(x) = 0 \iff x = \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/2a}$. On en déduit le tableau suivant :

x	0	x_0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\varphi(x_0)$	$-\infty$

avec $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/2a}$ et

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= \ln \left(\left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/2a} \right) - a \left(\left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/2a} \right)^{2a} \\ &= -\frac{1}{2a} \ln(2a^2) - \frac{a}{2a^2} \\ &= -\frac{1}{2a} (1 + \ln(2a^2))\end{aligned}$$

3. Si $a < \frac{1}{\sqrt{2e}}$ alors $2a^2 < \frac{1}{e}$ donc $\ln(2a^2) < -1$ et $1 + \ln(2a^2) < 0$. On a donc $\varphi(x_0) > 0$.

Comme φ est strictement croissante sur $]0; x_0[$ et strictement décroissante sur $]x_0; +\infty[$, continue sur ces intervalles, et que $0 \in]\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x); \varphi(x_0)[$ et $0 \in]\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x); \varphi(x_0)[$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'exactly deux solutions à l'équation $\varphi(x) = 0$, l'une dans l'intervalle $]0; x_0[$ et l'autre dans l'intervalle $]x_0; +\infty[$. En notant z_1 la première de ces solutions et z_2 la deuxième on a bien $z_1 < x_0 < z_2$.

4. Si $a > \frac{1}{\sqrt{2e}}$, alors de la même façon on aboutit à $1 + \ln(2a^2) > 0$ donc $\varphi(x_0) < 0$. D'après le tableau de variation de φ on a donc : $\forall x > 0, \varphi(x) < 0$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Si $a = \frac{1}{\sqrt{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution : x_0

Problème 1

1. On peut écrire en extension toutes les valeurs :

$$\left\{ \frac{(-1)^i}{i+1} ; i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\} = \left\{ 1 ; \frac{-1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{-1}{4} ; \frac{1}{5} \right\} \text{ donc } \min_{i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket} \frac{(-1)^i}{i+1} = -\frac{1}{2}.$$

2. (a) Pour tout entier $k \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} u_n(k+1) &= \min_{i \in \llbracket n, n+k+1 \rrbracket} x_i \\ &= \min(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leq \min(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \\ &\leq u_n(k) \end{aligned}$$

donc la suite pour n fixé, la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante.

- (b) Par hypothèse (x_n) est une suite de réels positifs, donc pour tout n et tout k dans \mathbb{N} on a $u_n(k) \geq 0$. Pour tout entier naturel n , la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est donc minorée, et elle est décroissante d'après la question précédente donc elle converge.
- (c) Pour tous entiers naturels n et k , on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}(k) &= \min(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+1+k}) \\ &\geq \min(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k+1}) \\ &\geq u_n(k+1) \end{aligned}$$

par passage à la limite dans cette inégalité lorsque k tend vers $+\infty$, on a donc : $u_{n+1} \geq u_n$. Ceci étant valable pour tout entier naturel n , la suite (u_n) est croissante.

- (d) (u_n) est croissante. Ou bien elle est majorée, auquel cas elle converge, ou bien elle n'est pas majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$.
3. (a) • Suite (y_n) .

Soit $n \geq 0$ fixé. Pour tout $k \geq 1$, et tout $i \in \llbracket n, n+k \rrbracket$ on a $y_i = 1 + (-1)^i = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$. Comme $k \geq 1$, $\llbracket n, n+k \rrbracket$ contient au moins deux entiers de parité différente donc :

$$\{y_i ; i \in \llbracket n, n+k \rrbracket\} = \{0; 2\}$$

donc pour tout $k \geq 1$, $u_n(k) = 0$. On a donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) = 0$ donc la suite (u_n) est constante égale à 0

- Suite (z_n)

Soit $n \geq 0$ fixé. Pour tout $k \geq 1$, l'ensemble $\llbracket n, n+k \rrbracket$ contient au moins 2 termes de parité différentes, donc $2 \in \{z_i ; i \in \llbracket n, n+k \rrbracket\}$.

On a $z_0 = 2, z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3$ donc $u_0(k) = u_1(k) = 1$ pour tout $k \geq 1$, puis à partir de $n = 2$ on a : $\forall k \geq 1, u_n(k) = 2$. Par passage à la limite, $u_0 = u_1 = 1$ et $u_n = 2$ pour tout $n \geq 2$.

- (b) D'après la question précédente :

- Pour (y_n) , $\liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$
 - Pour (z_n) , $\liminf_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$.
4. Pour tous entiers naturels n et k , $u_n(k) = \min(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$ et comme (x_n) est croissante, $\min(x_n, \dots, x_{n+k}) = x_n$ donc $u_n(k) = x_n$. Par passage à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$: $u_n = x_n$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.
5. Pour tous entiers naturels n et k on a $u_n(k) = \min(x_n, \dots, x_{n+k}) = x_{n+k}$ car $(x_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

Par unicité de la limite, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n+k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$, donc par passage à la limite dans l'égalité précédente : $u_n = \ell$, et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$!

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ c'est à dire $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

Problème 2

1. $[X = 2] = P_1 \cap P_2$

$$[X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3$$

$$[X = 4] = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} a_2 &= P(X = 2) \\ &= P(P_1 \cap P_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{par indépendance des lancers}$$

$= \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} a_3 &= P(X = 3) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{par indépendance des lancers}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= P(X = 4) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$= \frac{1}{8}$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$U_n = [X = 2] \cup [X = 3] \cup \dots \cup [X = n] = \bigcup_{k=2}^n [X = k]$$

donc comme cette union est disjointe :

$$P(U_n) = \sum_{k=2}^n P(X = k) = \sum_{k=2}^n a_k$$

3. (a) U_{n+1} est réalisé si et seulement si au cours des $n + 1$ premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs.

Ainsi, U_{n+1} est réalisé si et seulement si on obtient au moins une fois la succession de 2 piles lors des n premiers lancers, ou on obtient la succession de 2 piles au $n + 1$ -ième lancer. On peut donc écrire $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ et appliquer la formule du cours :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1})$$

- (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

Supposons que $U_n \cap B_{n+1}$ est réalisé. Alors il y a eu la succession de 2 piles au $n + 1$ -ième lancer, donc $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, et il y a eu au moins une autre succession de 2 piles lors des n premiers lancers. On distingue deux cas selon le résultat du $n - 1$ -ième lancer :

- Si le $n - 1$ -ième lancer est pile, alors P_{n-1} est réalisé, donc $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé.
- Si le $n - 1$ -ième lancer est face, alors F_{n-1} est réalisé et la première succession de 2 piles ne peut pas être réalisé ni au $n - 1$ -ième ni au n -ième lancer, donc elle a nécessairement lieu au cours des $n - 2$ premiers lancers, et donc U_{n-2} est réalisé. On a donc $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ réalisé.

On a donc montré que :

$$U_n \cap B_{n+1} \subset (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

Réciproquement, supposons que $(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$ est réalisé. Ou bien, $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, ou bien $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé.

- Si $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors il y a eu au moins une succession de 2 piles lors des $n - 2$ premiers lancers, donc lors des n premiers lancers, donc U_n est réalisé. De plus $P_n \cap P_{n+1} = B_{n+1}$ donc B_{n+1} est réalisé, et donc $U_n \cap B_{n+1}$ est réalisé.
- Si $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors B_{n+1} est réalisé et puisque $P_{n-1} \cap P_n$ est réalisé il y a eu au moins cette succession de 2 piles avant le n -ième lancer, donc U_n est réalisé. on a donc là aussi $U_n \cap B_{n+1}$ réalisé.

Dans tous les cas $U_n \cap B_{n+1}$ est réalisé donc :

$$(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \subset U_n \cap B_{n+1}$$

et finalement

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

On en déduit d'après 3.(a) que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + P(B_{n+1}) - P((U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})) \\ &= u_n + P(B_{n+1}) - (P(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + P(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})) \end{aligned}$$

car les deux événements sont incompatibles

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4} - u_{n-2} \times P(F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) - \frac{1}{8}$$

car U_{n-2} dépend uniquement des lancers 1 à $n - 2$, donc est indépendant de F_{n-1}, P_n et P_{n+1}

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_{n-2}$$

$$= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

(c) Pour tout entier $n \geq 4$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geq 0$ car u_{n-2} est une probabilité donc $u_{n-2} \leq 1$.

On en déduit que (u_n) est croissante, elle est majorée par 1 (toujours car $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier n) donc elle converge vers une limite finie ℓ . On a donc aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n-2} = \ell$.

Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ on obtient donc $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$ d'où $\boxed{\ell = 1}$.